

六瓣梅花型混凝土桩截面几何特性研究

李 龙

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程安全全国重点实验室,湖北 武汉 430071)

摘要:六瓣梅花型混凝土桩是为满足工程需要研发的一种新型异型桩。为促进六瓣梅花型混凝土桩的推广应用,文章基于桩截面外切圆半径和开弧弧度两个控制变量,对其截面几何特性进行研究。研究表明:1)随着截面外切圆半径和开弧弧度的增大,桩截面面积和截面周长逐渐增大;2)随着截面外切圆半径的增大,周长-面积比逐渐减小,随着开弧弧度的增大,周长-面积比逐渐增大;3)当六瓣梅花型混凝土桩与圆形桩截面面积相等时,开弧弧度在 $60^{\circ} \sim 180^{\circ}$ 范围内,六瓣梅花型混凝土桩截面周长比等截面圆形桩的截面周长大 $0 \sim 10\%$;4)随着截面外切圆半径的增大,六瓣梅花型混凝土桩主惯性矩逐渐增大,且大于等截面圆形桩的主惯性矩。本文成果可为六瓣梅花型混凝土桩的桩基设计提供参考。

关键词:地基处理; 六瓣梅花型混凝土桩; 惯性矩; 承载力; 几何特性

中图分类号: TU473

文献标志码: A

文章编号: 1673-8993(2025)04-0013-07

doi: 10.13402/j.gcjs.2025.04.043

Study on cross-section geometric characteristics of six-petal plum-shaped concrete pile

LI Long

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering Safety, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, Hubei, China)

Abstract: The six-petal plum-shaped concrete pile is a new type of special-shaped pile developed to meet the needs of the project. In order to promote the popularization and application of the six-petal plum-shaped concrete pile, the geometric characteristics of the section are studied based on the two key sectional parameters (the outsourcing radius of six-petal plum-shaped concrete pile and the open arc angle of six-petal plum-shaped concrete pile). The results show that: 1) the cross-sectional area and the perimeter of the section gradually increase with the increase of the outsourcing radius and the open arc angle of the pile; 2) the perimeter-area ratio gradually decreases with the increase of the outsourcing radius of pile, and increases with the increase of the open arc angle of pile; 3) when the cross-sectional area of the six-petal plum-shaped concrete pile is equal to that of the circular pile, the cross-sectional perimeter of the six-petal plum-shaped concrete pile is $0 \sim 10\%$ larger than that of the circular pile with equal cross-section in the range of $60^{\circ} \sim 180^{\circ}$; 4) the main moment of inertia of the six-petal plum-shaped concrete pile increases with the increase of the the outsourcing radius of pile, and is greater than the main moment of inertia of the circular pile with the same cross section area. The results can provide some references for the design of pile foundations.

Key words: foundation treatment; six-petal plum-shaped concrete pile; moment of inertia; bearing capacity; geometric properties

异型桩复合地基具有承载力高、变形小、安 全性高及沉降控制方便等优点,被广泛应用于一

收稿日期: 2023-07-12

作者简介: 李 龙(1993—),男,博士,从事路基加固方面的研究。

些大型工程,如我国浙江杭浦高速、沈海高速,南京长江第四大桥等^[1]。根据桩截面形状,异型桩可以分为不同的桩型,常见的异型桩有楔形桩^[2-3]、阶梯型桩^[4]、钢管桩^[5-6]、竹节桩^[7-8]、Y型桩^[9]、树根桩^[10]、X形桩^[11-12]和梅花型桩^[13-14]等。异型桩是通过改变桩身的形状特征来提高桩基础承载力的一种桩型,近年来,异型桩成为国内外学者研究的热点之一。

针对异型桩的截面几何特性,相关学者进行了一系列的研究。刘汉龙等^[15]对X型混凝土桩截面几何特性进行研究,推导了X型截面面积、周长表达式,建立了X型桩截面惯性矩的数值计算方法,给出了桩截面3个独立变量对截面几何特性的影响规律。李建委等^[16]通过控制变量法分析了Y形桩的桩长和桩截面几何参数对Y形桩沉降及极限承载力的影响。2022年,李佳等^[17]基于4个桩截面控制变量,推导了螺纹桩截面面积、周长的计算公式,建立了螺纹桩截面惯性矩的计算方法,分析了4个控制变量对截面几何特性的影响规律。任连伟等^[18]提出了一种周长最大化、周长面积比最大化五星形桩,并研究了五星形桩的承载机制和荷载传递规律。2023年,邓友生等^[13]通过梅花型混凝土桩截面的外切圆半径和开弧弧度两个控制变量,研究了梅花型桩的截面面积、周长、截面惯性矩,并分析了两个控制变量对周长与面积比、等截面面积梅花型与圆形桩周长比的影响规律。研究表明,相同混凝土用量时梅花型桩的周长比圆形桩大15%~16%。

六瓣梅花型混凝土桩是在梅花型桩的基础上提出的一种新型异型桩(图1),相较于等截面圆形桩,其具有较大的周长面积比,因而可以在不增加混凝土浇注量的前提下提高单桩承载力,从而提高性价比。它可广泛应用于高速公路、高速铁路、市政、机场及水利等领域的地基基础工程。为了促进六瓣梅花型混凝土桩的推广和应用,本文对其截面几何特性进行研究,以其可为相关案例提供参考。

1 六瓣梅花型混凝土桩截面几何特征计算

1.1 桩截面参数

梅花型混凝土桩的两个控制变量如图1所示,

其分别为桩截面外切圆的半径 a (m)及开弧弧度 θ (°)。其中, o_1 、 o_2 、 o_3 和 r_1 、 r_2 、 r_3 分别为开弧弧度 $\theta=60^\circ$ 、 $60^\circ<\theta<180^\circ$ 和 $\theta=180^\circ$ 时对应圆的圆心和半径,m; A 、 B 为六瓣梅花型混凝土桩截面的尖角点; p 为六瓣梅花型混凝土桩与外切圆的切点。当 $\theta=60^\circ$ 时,截面为圆形;当 θ 取值介于 60° 和 180° 之间时,截面为六瓣梅花形,开弧段对应的圆心位于六瓣梅花型混凝土桩截面几何中心与开弧弧度为半圆时的圆心 o_3 之间的连线上;当 $\theta=180^\circ$ 时,截面开弧段为半圆形。 θ 的角度不同时,六瓣梅花型混凝土桩截面的周长、面积具有不同的表达式。

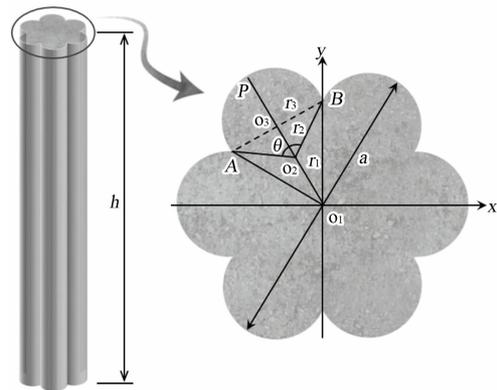


图1 六瓣梅花型混凝土桩及其横截面

1.2 桩截面几何特性计算

将开弧弧度 $\theta=60^\circ$ 、 $60^\circ<\theta<180^\circ$ 和 $\theta=180^\circ$ 时对应外切圆的截面周长分别设为 C_1 、 C_2 、 C_3 ,面积分别设为 A_1 、 A_2 、 A_3 ,由几何关系可得:

$$\begin{cases} C_1 = 2\pi a \\ C_2 = \frac{6a\theta}{2\sin(\theta/2 - \pi/6) + 1} \\ C_3 = \frac{6\pi a}{\sqrt{3} + 1} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A_1 = 2\pi a^2 \\ A_2 = \frac{3a\theta + 12a^2 \sin(\theta/2) \sin(\theta/2 - \pi/6)}{[2\sin(\theta/2 - \pi/6) + 1]^2} \\ A_3 = \frac{3\pi + 6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 4} a^2 \end{cases} \quad (2)$$

以六瓣梅花型混凝土桩横截面几何中心为原点建立坐标系,如图1所示,则圆心 o_2 的坐标如式(3)所示。

$$\begin{cases} x_{o_2} = \frac{-a \sin(\theta/2 - \pi/6)}{2 \sin(\theta/2 - \pi/6) + 1} \\ y_{o_2} = \frac{\sqrt{3} a \sin(\theta/2 - \pi/6)}{2 \sin(\theta/2 - \pi/6) + 1} \end{cases} \quad (3)$$

式中: x_{o_2} 和 y_{o_2} 分别为圆心 o_2 的横、纵坐标值, m; o_2 为开弧弧度 $60^\circ < \theta < 180^\circ$ 时开弧段对应的圆心。

以 o_2 为圆心, r_2 为半径 (m), 令 $\xi = \sin(\theta/2 - \pi/6)$, 可得圆的标准方程

$$\left[x - \frac{a\xi}{2\xi + 1} \right]^2 + \left[y - \frac{\sqrt{3}a\xi}{2\xi + 1} \right]^2 = r_2^2 \quad (4)$$

此时, 开弧段 AB 的方程为

$$y = \sqrt{r_2^2 - \left[x - \frac{a\xi}{2\xi + 1} \right]^2} + \frac{\sqrt{3}a\xi}{2\xi + 1} \quad (5)$$

式中: $a > 0$, $60^\circ < \theta < 180^\circ$ 。

由于六瓣梅花型混凝土桩横截面的截面几何中心、坐标系的原点和桩横截面的截面形心重合, 故 x, y 轴为形心主轴, 六瓣梅花型混凝土桩横截面对 x, y 轴的惯性矩为形心主惯性矩, 由于桩横截面为六瓣梅花形, 是对称图形, 因此桩的横截面对 x, y 轴的形心主惯性矩相等^[19]。通过积分可得出六瓣梅花型混凝土桩横截面的主惯性矩。当开弧弧度 $\theta = 60^\circ$ 时, 截面为圆形, 桩截面主惯性矩等于圆的截面主惯性矩; 当 $60^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, 六瓣梅花型混凝土桩的截面主惯性矩由移轴公式求得, 由于求解复杂, 可通过 Mathematica 软件的数值积分功能进行求解; 当开弧角度 $\theta = 180^\circ$ 时, 六瓣梅花型混凝土桩截面的主惯性矩的表达式为

$$I_{x_x} = I_{y_y} = \frac{39\pi r_3^4}{4} + \left(\frac{5}{18} + \frac{64}{9}\pi \right) (a - r_3) r_3^3 \quad (6)$$

式中: I_{x_x} 和 I_{y_y} 分别为桩的横截面对 x 轴和 y 轴的主惯性矩, m^4 。

2 六瓣梅花型混凝土桩截面几何特性分析

为比较六瓣梅花型混凝土桩截面外切圆的半径 a 及开弧弧度 θ 对桩截面几何特性的影响, 下面利用 Mathematica 软件对异型桩的截面周长 - 面积比、等截面异型桩与圆形桩截面周长比进行分析, 其中外切圆半径 a 从 1 m 变化到 10 m, r_3 从 0.1 m 变化到 1 m。

2.1 截面面积

图 2、3 分别表示开弧弧度 θ 一定时, 外切圆半径 a 对横截面面积的影响曲线以及外切圆半径 a 和开弧弧度 θ 对面积 A_2 的影响曲线。由图 2 可知, 当开弧弧度 θ 一定时, 六瓣梅花型混凝土桩的截面面积随着外切圆半径 a 的增大而增大; 外切圆半径 a 一定时, 截面面积随开弧弧度 θ 的增大而减小。由图 3 可知, 当 $60^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, 六瓣梅花型混凝土桩的截面面积 A_2 随着外切圆半径 a 的增大而增大, 但增幅较小, 截面面积 A_2 随着开弧弧度 θ 的增大先增大然后逐渐平缓, 当开弧弧度接近 4 rad 时呈下降趋势。

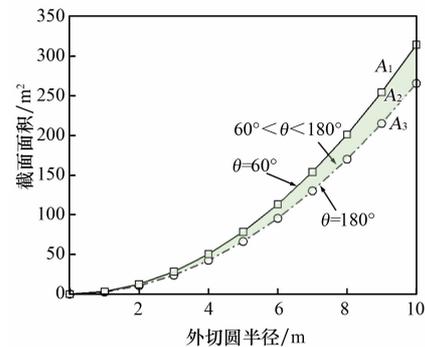


图 2 a 对截面面积的影响

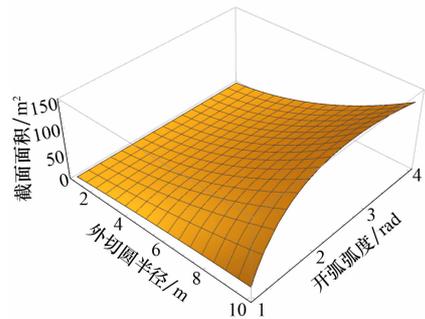


图 3 当 $60^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时 a, θ 对截面面积 A_2 的影响

分析图 2 可知, 六瓣梅花型混凝土桩的横截面面积与外切圆半径和开弧弧度呈正相关, 随着外切圆半径的增大, 开弧弧度对横截面面积的影响差距逐渐增大, 在实际工程中应综合考虑桩截面外切圆半径和开弧弧度对横截面面积的影响。分析图 3 可知, 在 $60^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, 开弧弧度对六瓣梅花型混凝土桩横截面面积的影响较大, 最优开弧弧度在 3 rad 左右, 而外切圆半径 a 对横截面面积的影响不大, 在实际工程中应合理选取开弧弧度。

2.2 截面周长

图 4、5 分别表示六瓣梅花型混凝土桩的周长随外切圆半径 a 和开弧弧度 θ 的变化规律。当开弧弧度一定时，六瓣梅花型混凝土桩的周长随着外切圆半径的增大而增大。开弧弧度 $\theta \in [60^\circ, 180^\circ]$ 的范围内，六瓣梅花型混凝土桩截面周长随着外切圆半径的增大而增大，当外切圆半径较小时开弧弧度对周长的影响不明显，当外切圆半径较大时截面周长随着开弧弧度的增大而增大。出现这种情况，是因为当外切圆半径较小时桩截面的面积较小，周长也相对较小，开弧弧度的改变量对于截面周长的影响微乎其微；当外切圆半径增大时，开弧弧度对截面周长的“影响”也在逐渐增大。

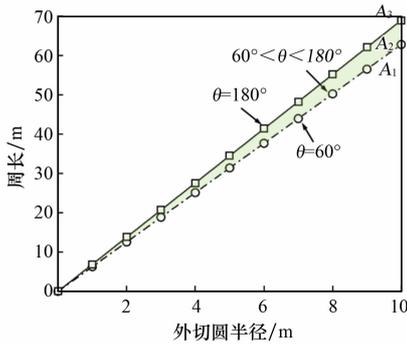


图 4 a 对周长 C 的影响

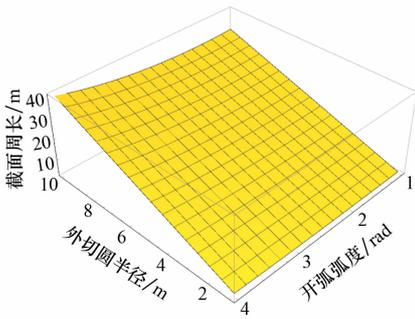


图 5 a 、 θ 对周长 C_2 的影响

2.3 截面周长 - 面积比

六瓣梅花型混凝土桩截面的周长 - 面积比可表示为

$$\lambda = \begin{cases} 2/a & \theta = 60^\circ \\ \frac{4\theta \sin(\theta/2 - \pi/6) + 1}{a\theta + 4a \sin(\theta/2) \sin(\theta/2 - \pi/6)} & 60^\circ < \theta < 180^\circ \\ \frac{2\pi(4 + 2\sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 1)(\pi + 2\sqrt{3})a} & \theta = 180^\circ \end{cases}$$

(7)

图 6~8 分别给出 3 种开弧弧度时六瓣梅花型混凝土桩截面外切圆的半径 a 及开弧弧度 θ 对截面周长 - 面积比 λ 的影响曲线。不难看出， λ 均大于 0；在 θ 一定的情况下， λ 随着 a 的增大而减小；当 $1 < a < 10$ ， $60^\circ < \theta < 180^\circ$ 时， λ 随着 θ 的增大而增大；当 $1 < a < 10$ ， $60^\circ < \theta < 180^\circ$ 时， λ 随着 a 的增大而减小。

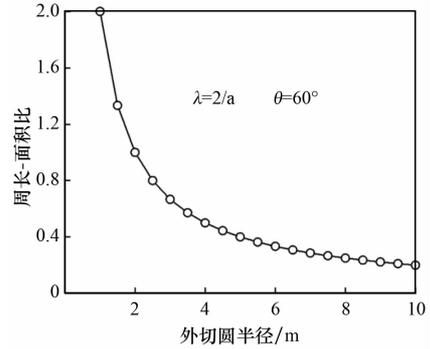


图 6 a 对截面周长 - 面积比 λ 的影响 ($\theta = 60^\circ$)

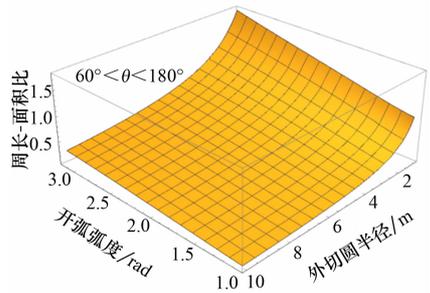


图 7 a 、 θ 对截面周长 - 面积比 λ 的影响 ($60^\circ < \theta < 180^\circ$)

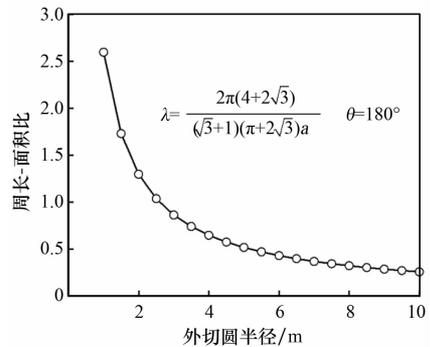


图 8 a 对截面周长 - 面积比 λ 的影响 ($\theta = 180^\circ$)

2.4 截面面积相同时六瓣梅花型混凝土桩与圆形桩的周长比

截面面积相同时六瓣梅花型混凝土桩与圆形桩的周长比为

$$\eta = \begin{cases} 1 & \theta = 60^\circ \\ \frac{3\theta}{2\pi\sin(\theta/2 - \pi/6) + \pi} & 60^\circ < \theta < 180^\circ \quad (8) \\ 1.1 & \theta = 180^\circ \end{cases}$$

图 9 为不同开弧弧度时等截面梅花型混凝土桩与等截面圆形桩周长比曲线。不难看出，在外切圆半径 ($a = 10$) 一定、 $\pi/3 < \theta < \pi$ 的情况下，当 $\theta < G$ 时，六瓣梅花型混凝土桩的周长小于圆形桩的周长，该情况与实际不符；当 $\theta > G$ 时，六瓣梅花型混凝土桩的周长大于圆形桩的周长；当 $\theta = 180^\circ$ 时，横截面周长比恒大于 1.1，说明在实际工程中当混凝土用量一定时，为了使竖向荷载作用下六瓣梅花型混凝土桩的桩侧表面积足够大，在 $\pi/3 \sim \pi$ 范围内应尽量增大开弧弧度。

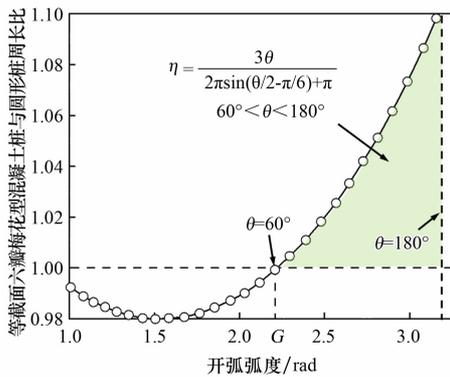


图 9 θ 对截面周长比的影响 ($60^\circ < \theta < 180^\circ$)

3 六瓣梅花型混凝土桩的截面主惯性矩及与其他桩型对比分析

3.1 截面主惯性矩分析

基于外切圆半径和开弧弧度两个变量，在 $r_3 \in [0.1, 1.0]$ 和外切圆半径 $a \in [1, 10]$ 的范围内研究六瓣梅花型混凝土桩截面主惯性矩，其中 r_3 为 $\theta = 180^\circ$ 时对应圆的半径。在开弧弧度 ($\theta = 180^\circ$) 一定时，六瓣梅花型混凝土桩截面主惯性矩与外切圆半径 a 、半径 r_3 的计算公式为

$$I = \frac{39\pi r_3^4}{4} + \left(\frac{5}{18} + \frac{64}{9}\right)(a - r_3)r_3^3 \quad (9)$$

式中： I 为六瓣梅花型混凝土桩截面主惯性矩， m^4 。

图 10 为六瓣梅花型混凝土桩截面的主惯性矩曲线。当开弧弧度 ($\theta = 180^\circ$) 一定，六瓣梅花型混

凝土桩外切圆较小时，半径 r_3 对截面主惯性矩的影响不大，随着外切圆半径逐渐增大，半径 r_3 对截面主惯性矩的影响呈指数型增大。当半径 r_3 一定时，截面主惯性矩随着外切圆半径的增大呈线性增大趋势。可以看出，在外切圆半径 a 、半径 r_3 的影响下，六瓣梅花型混凝土桩截面主惯性矩始终呈逐渐上升趋势。

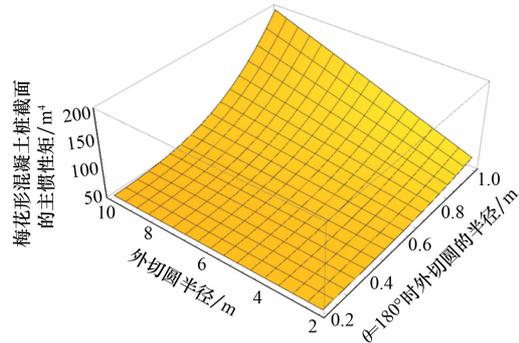


图 10 a, r_3 对六瓣梅花型混凝土桩截面主惯性矩 I 的影响

3.2 与其他桩型对比分析

设六瓣梅花型混凝土桩、圆形桩及其他 4 种异型桩^[20-22]的截面积均为 0.50 m^2 ，比较不同桩的周长、惯性矩如表 1 所示。

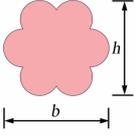
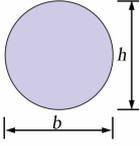
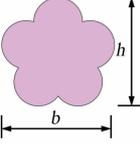
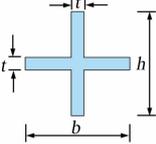
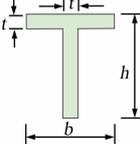
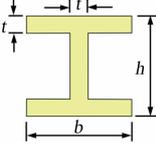
分析表 1 可知：5 种异型桩的周长、惯性矩均比等截面面积的圆形桩大，表中 5 种异型桩的周长比圆形桩大 $10.99\% \sim 18.80\%$ ；主惯性矩大 $20\% \sim 41.5\%$ 。用六瓣梅花型混凝土桩代替圆形桩，在桩身工程量相同的情况下，桩的周长可提高 10% ；桩的惯性矩可提高 1.03 倍。

4 结 论

(1) 通过六瓣梅花型混凝土桩横截面的几何特征，推导了 3 种开弧弧度情况下桩横截面的周长、面积、以及周长 - 面积比公式；借助 Mathematica 软件分别分析了 a, θ 对截面周长 - 面积比的影响：3 种情况下 λ 均大于 0；在 θ 一定的情况下， λ 随着 a 的增大而减小；当 $1 < a < 10$ ， $60^\circ < \theta < 180^\circ$ 时， λ 随着 θ 的增大而增大；当 $1 < a < 10$ ， $60^\circ < \theta < 180^\circ$ 时， λ 随着 a 的增大而减小。

(2) 对比横截面面积相等时六瓣梅花型混凝土桩与圆形桩的横截面周长比，不难发现，在 $0 < a < 10, \pi/3 < \theta < \pi$ 的情况下，当 $\theta < G$ 时，六瓣

表 1 六瓣梅花型混凝土桩与其他桩型比较

桩型	桩横截面面积/m ²	h /m	b /m	t /m	周长/m	周长比	主惯性矩/m ⁴	惯性矩比
	0.50	0.88	0.88	—	2.76	1.10	0.021	1.03
	0.50	0.80	0.80	—	2.51	1.00	0.02	1.00
	0.50	0.83	0.85	—	2.91	1.16	0.021	1.03
	0.50	0.95	0.95	0.32	3.80	1.51	0.02	1.20
	0.50	1.16	0.87	0.29	4.06	1.62	0.06	3.00
	0.50	1.18	0.71	0.24	4.72	1.88	0.08	4.15

注： h 为桩截面高度，m； b 为桩截面宽度，m； t 为十字形桩、T形桩和工字形桩的截面翼缘厚度，m。

梅花型混凝土桩的周长小于圆形桩的周长；当 $\theta > G$ 时，六瓣梅花型混凝土桩的周长大于圆形桩的周长；当 $\theta = 180^\circ$ 时，横截面周长比恒大于1.1。

(3) 六瓣梅花型混凝土桩的横截面外切圆半径和开弧弧度两个控制变量对桩横截面几何特性均有影响，在横截面面积相等的前提下，当 $G < \theta < 180^\circ$ 时，随着开弧弧度增大，六瓣梅花型混凝土桩与圆形桩的周长比呈线性增大趋势，说明该桩作为摩擦桩越经济。同时，两个独立变量是相互影响、相互制约的，当某一个变量确定的情况下，另外一个变量的变化范围会受到一定的制约。在实际工程中使用六瓣梅花型混凝土桩时，应充分考虑其用途、桩体制作方便与耐用等因素。

(4) 用六瓣梅花型混凝土桩代替圆形桩，在桩身混凝土用量相同时，六瓣梅花型混凝土桩的截面

周长提高了10%；桩的惯性矩可提高1.03倍。

(5) 本文是基于二维的力学方法计算桩截面几何特性，没有考虑三维的力学特性，因此，在后续的工作中会继续探索六瓣梅花型混凝土桩的三维受力特性。

参考文献：

- [1] GONG W, WANG Z, DAI G, et al. Foundations of Yangtze river mainstream bridges in China [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Forensic Engineering, 2020, 173(1): 13-24.
- [2] 纪伟杰. 考虑沉桩挤土效应的楔形管桩纵向振动特性[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(27): 11280-11287.
- [3] 杨紫健, 吴文兵, 陆洪智, 等. 黏弹性地基中楔形桩水平振动特性研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021,

- 53(11):74-83.
- [4] 张胤红. 粘土地层中阶梯型变截面桩横向承载特性试验研究[D]. 南昌:华东交通大学,2019.
- [5] 王海宁,秦永亮,王培森. 软弱夹土层场地预应力管桩形状对沉桩过程的影响[J/OL]. 工程建设,1-6 [2025-02-15]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/43.1465.TU.20250213.0937.002.html>.
- [6] 李波,余建飞. 基于PHC管桩现场静载试验的基桩承载特性研究[J]. 水利水电技术(中英文),2023,54(10):96-102.
- [7] 酆亮,叶俊能,周晔,等. 软土地区竹节桩复合地基承载特性试验研究[J]. 地下空间与工程学报,2020,16(4):986-992.
- [8] 邓岳保,张日红,孙嘉烽,等. 静钻根植排水桩技术及模型试验研究[J]. 建筑结构学报,2022,43(8):293-302.
- [9] REN L, YANG Q, KONG G, et al. Model tests on Y-Shaped piles under compressive and lateral loading in saturated sand[J]. *Geofluids*. 2021:1-14.
- [10] 宾帅,钟艳明,罗国强. 树根桩在建筑工程基础加固设计中的应用[J]. 工程建设,2024,56(8):50-55.
- [11] 牛婷婷,孙广超. 高速铁路X形桩桩网复合地基动态响应分析[J]. 岩土力学,2021,42(5):1266-1280.
- [12] 卢一为,丁选明,刘汉龙,等. 均匀黏弹性地基中X形桩纵向振动响应简化解析方法[J]. 岩土力学,2021,42(9):2472-2479.
- [13] 邓友生,李龙,邓明科,等. 梅花型混凝土桩截面几何特性[J]. 西安科技大学学报,2023,43(1):143-150.
- [14] LI L, DENG Y. Strengthening mechanism of plum blossom pile composite foundation [J]. *Acta Geotechnica*, 2024, 19(7):4791-4808.
- [15] 刘汉龙,刘芝平,王新泉. 现浇X型混凝土桩截面几何特性研究[J]. 中国铁道科学,2009,30(1):17-23.
- [16] 李建委,王新泉,刘安远. 异形效应下Y形桩沉降和单桩极限承载力研究[J]. 世界地震工程,2015,31(2):162-171.
- [17] 李佳,丁选明,王竞州,等. 螺旋桩截面几何特性研究[J]. 重庆大学学报,2022,45(9):83-94.
- [18] 任连伟,詹俊峰,杨权威,等. 五星形桩截面尺寸优化及竖向承载机制试验研究[J]. 岩土力学,2017,38(10):2855-2864.
- [19] 刘杰民,乔燕. 材料力学[M]. 北京:中国电力出版社,2020.
- [20] ABDOLLAH NIA H, ALIZADEH E, KASHYZADEH, K. Fatigue life assessment of integral concrete bridges with H cross-section steel piles mounted in water [J]. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 2020, 20(5): 1661-1672.
- [21] FU Q. Experimental analysis on dynamic response of X-section piled raft composite foundation under cyclic axial load for ballastless track in soft soil [J]. *Shock & Vibration*. 2021(20):1-17.
- [22] PHUTTHANANON C, JONGPRADIST P, YENSRI P, et al. Dependence of ultimate bearing capacity and failure behavior of T-shaped deep cement mixing piles on enlarged cap shape and pile strength [J]. *Computers and Geotechnics*. 2018, 97:27-41.