

基于蒙特卡罗模拟的维纳过程首次超越失效概率分析

张振浩, 陈 滔, 袁 方

(长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要:首次超越可靠性分析是结构动力可靠性分析的重要方面。文章针对维纳过程,基于蒙特卡罗模拟法进行了维纳过程首次超越安全界限问题的研究,阐述了维纳过程仿真思路与步骤,选用生成随机数的直接法在 MATLAB 中实现维纳过程的模拟。然后,以混凝土耐久性退化符合维纳过程为例,基于蒙特卡罗模拟法计算首超失效概率,将其计算结果与数学解析法计算结果进行对比。结果表明:蒙特卡罗模拟法的计算精度和解析解非常接近,且在应用范围和计算便捷性上更具优势。本研究可为相关领域应用维纳过程计算首超失效概率提供数值解法。

关键词:结构动力可靠度; 蒙特卡罗模拟; 维纳过程; 首超概率; 模拟仿真

中图分类号: TU528

文献标志码: A

文章编号: 1673-8993(2025)10-0075-06

doi:10.13402/j.gcjs.2025.10.128

Analysis of the first -passage failure probability of the Wiener process based on Monte Carlo simulation

ZHANG Zhenhao, CHEN Tao, FANG Yuan

(Changsha University of Science and Technology, School of Civil Engineering, Changsha 410114, Hunan, China)

Abstract: Analytically solving the first passage failure probability of the Wiener process is extremely significant. Therefore, this paper conducts research on the problem of the first passage of the Wiener process across the safety boundary based on the Monte Carlo simulation method. Firstly, the simulation ideas and steps of the Wiener process are elaborated, where the direct method for generating random numbers is adopted to implement Wiener process simulation in MATLAB. Then, taking concrete durability degradation following a Wiener process as an engineering case, the first passage failure probability is calculated using the Monte Carlo simulation method. Comparative analysis with mathematical analytical solutions demonstrates that the Monte Carlo method achieves computational accuracy comparable to analytical solutions, while exhibiting superior advantages in application scope and operational convenience. This research provides a numerical solution approach for calculating first passage failure probabilities using Wiener processes in relevant engineering fields.

Key words: structural dynamic reliability; monte carlo simulation; wiener process; first passage probability; simulation

结构动力可靠性分析在工程领域中具有至关重要的意义,为工程设计、维护和决策提供科学依据。通过准确分析结构动力可靠性,可有效降低工程事故风险。蒙特卡罗模拟法是一种基于概率统计理论的数值计算方法,其核心思想是通过设定随机过程并生成大量随机样本,对复杂问题

进行统计模拟以获取近似解^[1]。蒙特卡罗模拟法适用范围十分广泛,具有通用方法之称,能求解各种不确定性问题。李侃等^[2]基于蒙特卡罗方法对边坡的可靠性进行了分析,利用 MATLAB 分析获得输入参数的分布类型,再利用蒙特卡罗模拟产生分布律相同的参数,并计算出边坡安全系数,

收稿日期: 2025-02-27

作者简介: 张振浩(1980—),男,教授,从事结构动力可靠度理论及其应用研究。

通信作者: 陈 滔(2000—),男,硕士研究生,从事结构动力可靠度理论及其应用研究。

最终得到边坡破坏率和可靠性指标。何鑫等^[3]运用蒙特卡罗方法计算了单点滑环系统失效概率,结果显示蒙特卡罗法计算的收敛性好,结果精度高,且能解决马尔科夫法不能解决的问题。

在首次超越失效问题研究方面,张龙文等^[4]基于平稳高斯结构响应的 Poisson 模型修正了一个平稳非高斯结构响应的首次超越概率的解析方法。杨伟军等^[5]在未采用计算假定的前提下用不同的方法对马尔科夫过程首超概率进行了研究。HONG^[6]使用 TFPSD 函数来估计 SDOF 系统在随机地震或风激励下的响应和首超概率的统计数据。上述计算方法虽然属于精确解法,但有一个共同的特点,此类解析法的推导过程极其复杂,且每一法都有一定的适用范围,是针对某一种情况下推导出来解决相对应问题的,不能进行通用性求解。

为了克服解析法的局限性,更好地推进随机过程首次超越安全界限概率的研究工作,基于蒙特卡罗模拟的可靠性分析方法应运而生。本文在蒙特卡罗模拟法的基础上进行研究,通过 MATLAB 软件进行维纳过程仿真模拟,实现混凝土耐久性退化符合维纳过程的首超失效概率的数值求解。即使在没有相应求解失效概率数学解析式的情况下,也能通过此数值模拟方法求解退化过程符合维纳过程的结构在相应时间段内的首超失效概率,可为基于首超破坏机制的结构动力可靠度研究提供研究基础。

1 维纳过程的仿真

1.1 仿真思路

维纳(Wiener)过程是一种重要的随机过程,随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 若满足如下条件:

- (1) $\{P(X(0) = 0) = 1\}$;
- (2) $\{X(t), t \geq 0\}$ 是齐次独立增量过程;
- (3) 对任意的 $0 \leq t_1 \leq t_2$, 有 $X(t_1, t_2) = X(t_2) - X(t_1) \sim N[0, \sigma^2(t_2 - t_1)]$, 且 $\sigma > 0$ 为常数。

则称随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为维纳过程,若方差 $\sigma^2 = 1$, 则此过程为标准维纳过程。

由维纳过程定义可知该过程有两大特点: 1) 该过程的时间与状态都连续; 2) 该过程的增量是服从正态分布的随机变量, 且均值为 0、方差与时

间间隔的长度呈线性关系, 它意味着如果初始时刻为零, 那么此过程在任意时刻 t 的增量值 $W(t)$ 是一个正态随机变量, 其数值特征的均值为零, 方差为 $\sigma^2 t$, 这是进行维纳过程仿真的关键。因此, 在给定的时间间隔序列和数值特征方差的情况下, 根据维纳过程的独立增量性, 时间间隔内的增量就可以按照方差为 $\sigma^2 t_1, \sigma^2(t_2 - t_1), \sigma^2(t_3 - t_2), \dots, \sigma^2(t_n - t_{n-1})$ 生成相互独立且均值为零的服从正态分布的随机变量样本, 从而在 $[0, t_n]$ 内对维纳过程进行仿真模拟, 这也是维纳过程仿真的基本思想^[7]。

1.2 仿真步骤

维纳过程的性质表明生成一个相互独立的均值为零的正态分布随机变量样本是仿真的关键。因为维纳过程在时间间隔上的增量属于平稳独立增量, 并且增量是服从正态分布的随机变量, 均值为零, 方差为 $\sigma^2(t_n - t_{n-1})$, 维纳过程仿真步骤如下:

第一步, 根据 Wiener 过程定义的特点, 首先生成满足均值为零和方差为 σ^2 的正态随机变量样本。生成服从正态分布的随机变量样本有两种方法, 间接法和直接法。

1.2.1 间接法

先用乘同余法产生 $(0, 1)$ 上的均匀分布随机数, 再利用随机变量反函数法将均匀随机数转换成标准正态分布随机数, 即可变换成正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量样本, 其转化式为

$$y_1 = \mu + \sigma \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2) \quad (1)$$

$$y_2 = \mu + \sigma \sqrt{-2 \ln r_1} \sin(2\pi r_2) \quad (2)$$

式中: μ 为所求正态随机数的均值; σ 为所求正态随机数的标准差; r_1, r_2 为 $(0, 1)$ 上的均匀随机数; y_1 和 y_2 为生成的正态分布随机变量样本。

1.2.2 直接法

在 MATLAB 中编程或调用统计工具箱中的 Normrnd 函数生成相应的正态分布随机变量样本。对间接法而言, 直接法更加方便, 并且十分高效, 在实际中应用比较广泛。

第二步, 维纳过程本质上属于随机游走过程, 根据维纳过程增量在时间间隔 $t_n - t_{n-1}$ 上服从 $N[\sigma^2(t_n - t_{n-1})]$ 的正态分布, 且方差与时间间隔

呈线性关系,因此在得到服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的正态随机变量样本后,再与时间间隔的算术平方根 $\sqrt{t_n - t_{n-1}}$ 相乘,即得到对应时间间隔上的过程增量。在得到时间间隔上的增量后对其进行累加,即得到 N 个时间点上的样本函数。

2 基于蒙特卡罗模拟法的维纳过程首超概率分析

在实际问题中,当结构的响应超过界限值时,就意味着结构发生了破坏,这一现象被称为首超破坏。基于蒙特卡罗模拟法的原理,在维纳过程仿真的基础上,增加界限值设定、逻辑判断和统计分析等环节,利用 MATLAB 软件就可以直接计算出相应维纳过程的首超概率。

接下来用一个实例进行具体分析。假设维纳过程 $\{X(t), t \geq 0\}$, 取时间间隔取 $t_n - t_{n-1} = 1$, 方差 $\sigma^2 = 9$, $t_n = 500$, 并假设此结构的界限值(阈值) $b = 100$ 。

本次采用直接法生成服从正态分布的随机样本。再将生成的随机样本乘以时间间隔的平方根,便得到时间间隔的增量,在区间内进行累加便得到随机过程样本函数的曲线。

在这里定义的样本函数失效是在规定时间内,样本函数超过界限值(阈值),即表示该过程失效,再利用蒙特卡罗法计算首超概率(失效概率)。蒙特卡罗法可以表示为

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[G(\hat{X})_i] \quad (3)$$

式中: N 为抽样模拟的总次数;当 $G(\hat{X})_i < 0$ 时,示性函数 $I[G(\hat{X})_i] = 1$, 表示结构失效;当 $I[G(\hat{X})_i] > 0$ 时, $I[G(\hat{X})_i] = 0$; 其中上标“ \wedge ”表示是抽样样本值。

维纳过程本质属于随机过程,因此利用符合条件的相对应的随机变量去模拟维纳过程是完全符合其本质的,并且在一定的置信区间条件下进行模拟更是满足了精度要求,更具客观真实性。

利用 MATLAB 编写程序进行了 100 次循环模拟,随机生成了 100 条样本函数,其样本函数结果如图 1 所示。

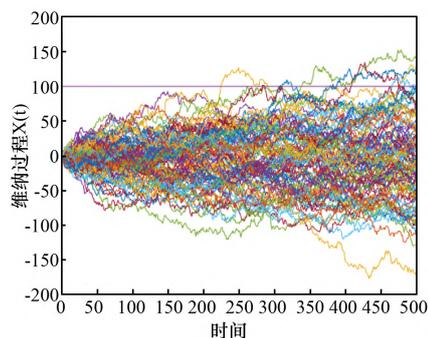


图1 维纳过程模拟 100 次的样本函数结果

图中直线为界限值(阈值),取 $b = 100$, 图中曲线为样本函数结果。本次运算生成的样本函数共有 100 条,其中穿越界限值(阈值)的样本函数有 8 条。在实际工程中,伴随着结构响应首次超越界限值,就标志此结构失效。因此,本次模拟的维纳过程首超失效概率为

$$\hat{p}_f = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^8 I[G(\hat{X})_i] = 0.08$$

因此,如果某结构功能退化过程满足维纳过程,且符合本实例的数值特征,即可通过本模拟程序直接计算出其在此时间段内的失效概率为 8%, 结构可靠度为 92%。

本方法不需要分析复杂的极限状态曲面,规避了结构失效概率分析的数学问题,并不受变量多少的限制,从宏观的角度直接分析并计算结构可靠度或失效概率。同时,本方法具有概念简单,适用性强的优点。另外,它还具有直观性,可以通过生动的图像了解计算过程和样本函数结果图的变化。因此,相对数学解析法而言,本方法在计算简便性方面和适用范围方面更具优势。

3 蒙特卡罗模拟法与数学解析法的实例对比分析

3.1 基于维纳过程的混凝土耐久性可靠度分析

标准维纳过程首超时间失效概率分布函数是一种精确求解标准维纳过程首超概率的计算公式,并且是解析显示表达式。其维纳过程在时间内的失效概率计算公式为^[8]

$$p_f = 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{T}} \right) \right] \quad (4)$$

式中: b 表示界限值(阈值); T 表示时间, a 。

根据《普通混凝土长期性能和耐久性能实验方

法标准》(GB/T 50082—2009)^[9]的相关规定,混凝土的相对动弹性模量损失达到 40% 即可被认定为破坏。在本实例分析中,假定界限值 b 取 10(实际工程需根据实际情况而定),时间 T 取 100 a,根据式(4)计算可得到混凝土的失效概率分布曲线如图 2 所示。

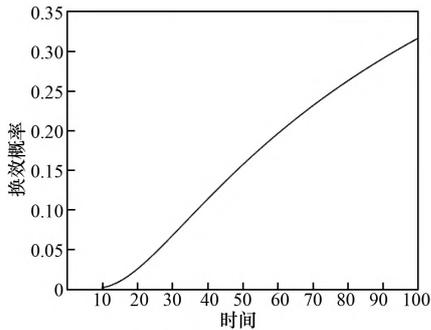


图 2 混凝土失效概率曲线

由图 2 可知,随着时间的增长,混凝土的失效概率越来越大。随机在图 2 中选取 5 个点,得出它对应时间的首超概率,分别设为 1、2、3、4、5 号点,其取值分别为(12,0.003 8)、(28,0.058 7)、(40,0.113 8)、(60,0.196 7)、(100,0.317 3),其中点的横坐标表示时间年限,纵坐标表示对应时间的首超概率。

3.2 基于蒙特卡罗模拟的混凝土耐久性可靠度分析

根据上述理论基础,利用蒙特卡罗模拟法计算混凝土在对应时间内的首超概率分析如下。

为保证抽样的误差,选用 95% 的置信度,有:

$$|\hat{p}_t - p_t| \leq Z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{\hat{p}_t(1-\hat{p}_t)}{N}} \quad (5)$$

式中: Z 为标准正态分布的双侧分位数,对应置信度为 $1-\alpha$,本文中取 95% 置信度,即 $\alpha=0.05$; $\hat{\sigma}$ 为抽样方差。

或者以相对误差 ε 来表示,有:

$$\varepsilon = \frac{|\hat{p}_t - p_t|}{p_t} < 2 \sqrt{\frac{1-\hat{p}_t}{N\hat{p}_t}} \quad (6)$$

在实际工程中, \hat{p}_t 通常是一个非常小的量,则式(6)近似表示为

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{N\hat{p}_t}} \quad (7)$$

从(7)式可以得出模拟抽样总次数为

$$N = \frac{4}{\hat{p}_t \cdot \varepsilon^2} \quad (8)$$

当相对误差取 $\varepsilon=0.2$ 时,模拟抽样总次数 N 表示为

$$N = \frac{100}{\hat{p}_t} \quad (9)$$

上述利用数学解析法求解失效概率后随机选取 5 点的失效概率分别为: 0.003 8、0.058 7、0.113 8、0.196 7、0.317 3,在用 95% 的置信度来保证蒙特卡罗法的抽样误差时,其抽样次数用式(9)计算得: $N_1 = \frac{100}{0.003 8} = 2.631 6 \times 10^4$ 、 $N_2 = \frac{100}{0.058 7} = 1.704 \times 10^3$ 、 $N_3 = \frac{100}{0.113 8} = 878$ 、 $N_4 = \frac{100}{0.196 7} = 508$ 、 $N_5 = \frac{100}{0.317 3} = 315$ 。抽样次数在这里定义为相对应时间点模拟生成的样本函数条数,即一个时间段内维纳过程模拟的样本函数数分别为 $2.631 6 \times 10^4$ 、 1.704×10^3 、878、508、315。

本实例分析的是基于标准维纳过程的首超失效概率,因此其生成的正态分布随机样本方差为 1,均值为 0。时间单位为 a,时间间隔取为 1 a。以 1 号点对应的时间和失效概率为例,通过 MATLAB 仿真模拟,在 26 316 个样本函数中有 95 条样本函数穿越界限值(安全阈值),即在 12 a 内有 95 条样本函数破坏失效。由蒙特卡罗模拟法得到 1 号点的首超失效概率为 $P_t = 0.003 6$ 。在 MATLAB 软件中生成的样本函数结果如图 3 所示。

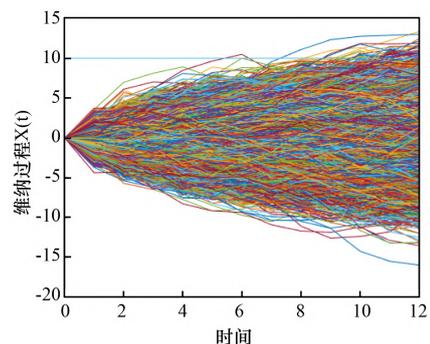
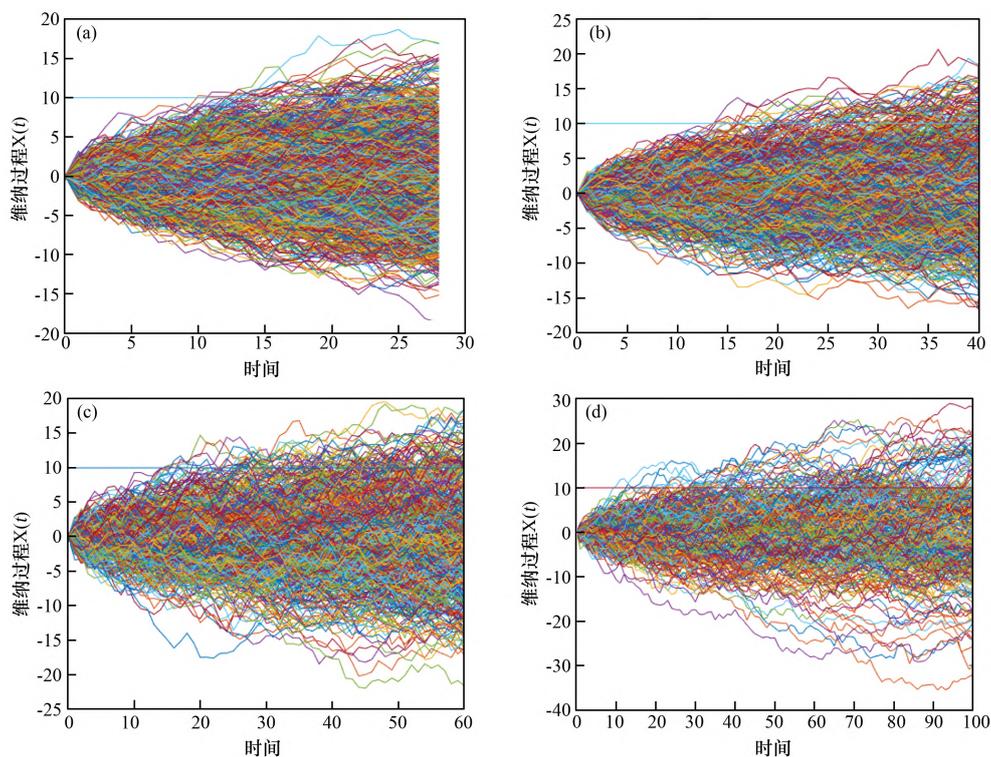


图 3 1 号点对应的维纳过程仿真模拟结果

另外随机选取的 4 点按照同样的方法进行蒙特卡罗模拟,其中,2、3、4、5 号点的样本函数 N 取值: 1.704×10^3 、878、508、315;时间 t 取值: 28、40、60、100 a。将参数代入基于蒙特卡罗模拟法的维纳过程首超概率计算程序中,计算结果和样本函数结果如图 4 所示。



(a) 2 号点; (b) 3 号点; (c) 4 号点; (d) 5 号点

图 4 维纳过程仿真模拟结果

由蒙特卡罗模拟法计算得到, 28、40、60、100 a 内混凝土的首超失效概率分别为 0.049 3、0.111 6、0.206 7、0.314 3。

3.3 蒙特卡罗模拟法结果与数学解析法结果的对比分析

根据上述蒙特卡罗模拟法和数学解析法求解混凝土首超失效概率的结果, 下面将从应用范围、计算结果和计算便捷性 3 个方面进行对比分析。

3.3.1 应用范围方面

蒙特卡罗模拟法求解首超概率适用范围十分广泛, 只要得到对应问题的数学特征(方差、均值), 便可以求解对应维纳过程的首超概率; 对于数学解析法而言, 由于在推导公式的过程中, 它是在特定条件下进行的, 受特定条件的限制, 如基于标准维纳过程的首超概率解析法, 它只适用于标准维纳过程, 对于方差不是 1 的情况将不再适用。

3.3.2 计算结果方面

对于随机选取的 5 个点, 两种方法的偏差绝对值: 0.02%、0.94%、0.22%、1.00%、0.30%, 5 个点的误差都保持在 1% 以内。由于两种方法的计算结

果十分接近或基本相同, 再一次验证了蒙特卡罗模拟法的合理性和准确性。

3.3.3 计算便捷方面

蒙特卡罗模拟法全程使用计算机软件运算, 几乎不需要手算, 减小了人为操作或计算产生的不必要误差, 提高了计算效率。基于标准维纳过程的首超概率解析法虽然最终计算过程比较简单, 并且结果十分精确, 但是推导公式的过程是比较复杂和麻烦的, 因此蒙特卡罗模拟法相比解析法在便捷性方面存在一定的优势。

综上分析, 蒙特卡罗模拟法在应用范围、计算便捷性和计算结果精确度方面存在一定的优势。

4 结 论

本文对维纳过程首次超越失效概率分析展开研究。首先, 基于维纳过程的特性给出了维纳过程样本函数的仿真方法, 并编写了维纳过程模拟仿真的 MATLAB 程序, 为其他类型的随机过程仿真提供了参考。随后编制了基于蒙特卡罗模拟法的维纳过程首超概率的计算程序, 以混凝土耐久性退化过程为例, 实现了基于蒙特卡罗模拟的维

纳过程首次超越失效概率求解。最后,将蒙特卡罗模拟法与数学解析法进行了对比分析。结果表明,数值模拟法的计算结果与精确解析解吻合良好,具有很高的精度,并且适用性和应用范围更具优势。本文研究为维纳过程首超失效概率计算提供了可靠的数值解法,有助于推动结构动力可靠性分析在工程实践中的深入应用。

参考文献:

- [1] 赵国藩,金伟良,贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2000.
- [2] 李侃,巨能攀. 基于蒙特卡罗方法的边坡可靠性评价[J]. 中国地质灾害与防治学报,2014,25(1):23-27.
- [3] 何鑫,唐友刚,付礼鹏等. 计算单点滑环系统失效概率的蒙特卡罗方法[J]. 船舶工程,2018,40(4):82-88.
- [4] 张龙文,卢朝辉,赵衍刚. 基于平稳非高斯结构响应前四阶矩的首次穿越概率计算[J]. 振动与冲击,2018,37(1):128-135.
- [5] 杨伟军,张振浩. 基于连续 Markov 过程首超时间概率分析的结构动力可靠性分析[J]. 工程力学,2011,28(7):124-129.
- [6] HONG H. Response and first passage probability of linear elastic SDOF systems subjected to nonstationary stochastic excitation modelled through S-transform[J]. Structural Safety,2021,88:102007.
- [7] 陈建华,彭淑燕,王伟等. 基于 MATLAB 的随机过程仿真[J]. 信息系统工程,2011,10:26-28.
- [8] 陈颖,王东升,朱长春. 随机结构在随机荷载下的动力可靠度分析[J]. 工程力学,2006,23(10):82-85.
- [9] 普通混凝土长期性能和耐久性能实验方法标准:GB/T 50082—2009[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2010.
- [13] 颜肃,刘德峰,张臻悦,等. 非降雨条件下风化壳淋积型稀土矿体稳定性分析及浸取剂筛选[J]. 中国稀土学报,2021,39(6):951-961.
- [14] 汤民波,涂志刚. 赣南某稀土矿边坡稳定性影响因素正交分析[J]. 现代矿业,2017,33(2):196-197;200.
- [15] 韩民,饶运章,王丹,等. 基于 FIFC 的稀土矿水位滑坡预警模型[J]. 稀土,2020,41(1):37-45.
- [16] 邬长福,姚贵佳,陈亮,等. 基于 Geo-Studio 的离子型稀土矿边坡稳定性分析[J]. 中国地质灾害与防治学报,2016,27(2):72-77.
- [17] 黄永刚,饶运章. 基于响应面法的边坡稳定性预测[J]. 江西理工大学学报,2016,37(3):68-71.
- [18] 饶运章,张永胜,饶睿,等. 离子型稀土原地浸矿边坡稳定影响因素敏感性分析[J]. 矿业研究与开发,2015,35(9):60-63.
- [19] 何书,陈飞,刘强,等. 稀土矿层厚度对浸矿边坡渗流及稳定性的影响[J]. 防灾减灾工程学报,2018,38(3):528-534.
- [20] 陈荣军,廖伟成,张耀平,等. 某离子型稀土矿边坡稳定性分析[J]. 有色金属科学与工程,2015,6(4):111-115.
- [21] 王旭,潘懿,孙春辉,等. 离子型稀土矿边坡稳定性与注液高度优化研究[J]. 中国矿业,2021,30(增刊1):311-315.
- [22] 蔡欣育,任旭华,张继勋,等. 不同降雨类型对边坡稳定性影响的研究[J]. 三峡大学学报(自然科学版),2020,42(2):34-39.
- [23] 史振宁,戚双星,付宏渊,等. 降雨入渗条件下土质边坡含水率分布与浅层稳定性研究[J]. 岩土力学,2020,41(3):980-988;1085.

(上接第 68 页)